アルゴリズムの問題としてのゼノンのパラドクス
── 運動否定第一・第二議論の構造と解決 ──

永　井　龍　男

序

アルゴリズム

小論はゼノンによる運動否定の第一･第二パラドクス（いわゆる「二分割」と「アキレウス」）をアルゴリズムの観点から分析し解決する試みである。「アルゴリズム（algorithm）」とは，9世紀アラビアの数学者アル=フワーリズミー（al-Khwarizmi）の名に因むことばで，本来，数学における各種の問題の「算法」「解法」を意味するが，近年では「コンピュータが計算する際に従う有効な手続き」を指す用語としても使われている[1)]。小論では，「アルゴリズム」を最も広い意味で，即ち「何らかの課題を解決するための一定の手続きないし作業手順」を意味する語として用いることにする。また，通常アルゴリズムが指示する手続きに関し，その記述もそれを実行する際のステップも有限でなければならない，という条件があるが，小論では，手順の記述は有限であってもその実行が無限のステップを含むような手続きをも「準アルゴリズム（quasi-algorithm）」の資格で考察の対象に含めることにする。アルゴリズムの意味をこのように拡張することによって，無限の過程が関わるゼノンのパラドクスをアルゴリズムの観点から分析することが可能になる。

小論においてこの方針を採用する理由は，それによって，ゼノンが提示するアルゴリズムに従う場合（彼が主張する通り）運動体は目標地点に到達できず，アキレウスは亀に追いつけないことを，明確に示せるからである。もちろんそれは，ゼノンのアルゴリズムに従わずに運動した場合にも同じ結果が生じることを意味しない。当の結果は，それらのアルゴリズムが或る制約を抱えていることによって生じるからである。そして，この点を明確に認識することが，二つのパラドクスを解決へと導くための鍵となる。

パラドクス解決への二つのアプローチ

二つのパラドクスについての具体的な議論に入る前に，(1) そもそもパラドクスとは何か，(2) 一般にパラドクスを解決するためにはどのようなアプローチがあり得るか，という点について触れておきたい。

或る議論が「パラドクス（paradox）」と呼ばれるのは，その議論の結論が正当な仕方で論証されているように見えるにもかかわらず，一般に確かな真理だと判断されている事柄に明らかに矛盾している場合である。パラドクスの解決とは，この両者の間の矛盾対立を解消することに他ならない。それを実現するには，次の二つの可能性がある。

その第一は，パラドクスと見なされる議論の前提または推論が誤っていることを示し，それによって，問題の議論の結論が偽であることを明らかにする，というものである。パラドクスの新たな解決法を提案する論者の多くは，このアプローチを採用している。しかし，これとは別のアプローチがあり得る。それは，（ゼノンが提示する手続きに従うなら）当の議論の結論は実際に正しいこと，そしてその結論は通常真理だと見なされている命題と決して矛盾しないことを明らかにする，というものである。

小論の解決法は部分的にこれら両方の要素を含むが，既に示唆したように，第二のアプローチが特に重要な役割を果たす。したがって，最終的には，運動する者が目標地点に到達でき，より速い走者がより遅い走者に追いつけるような，運動における通常の事態と，これと相反するゼノンの議論とが，同じ数学的枠組みの中で矛盾無く両立することが示されるだろう。

派生型パラドクスによる検証

ところで，ゼノンによる本来の二つのパラドクス以上に解決が困難なのは，アリストテレスが『自然学』第８巻第８章で報告する，「二分割」から派生した次のようなパラドクスである(263a4-11)。或る物体が目標地点に向かって運動する際，それが中間地点に達する度に一つずつ数を数えて行くことにする。中間地点は無限にあるので，当の物体が目標地点に到達する時には，人は無限の数を数え終えているのでなければならない。しかし，（数には終わりが無いのだから）それらを数え終えることは（原理的に）不可能である。したがって，運動するものは目標地点に到達できない。

後に明らかになるように，このパラドクスは第一・第二パラドクスと同一の構造を持つ。とすれば，二つのパラドクスの真の解決法は，同時に派生型パラドクスをも解決できるものでなければならない。だが，私の知る限り，この派生型パラドクスの解決法はこれまでのところ十分明確な論拠をもって示されたことがない。このことは，派生型パラドクスだけでなく，ゼノンの二つのパラドクスもいまだ未解決であることを示唆する。逆に，もし「二分割」と「アキレウス」を解決するのと同一の方法でこの派生型パラドクスをも解決できることが示されるなら，それは当の方法によってゼノンの二つのパラドクスが真の意味で解決されたことを確認する試金石となるであろう。したがって，「二分割」と「アキレウス」に加え，この派生型パラドクスを解くことが，小論の最も重要な目標となる。

1．アリストテレスの報告と第一パラドクスに関する二つの解釈

パラドクスの報告

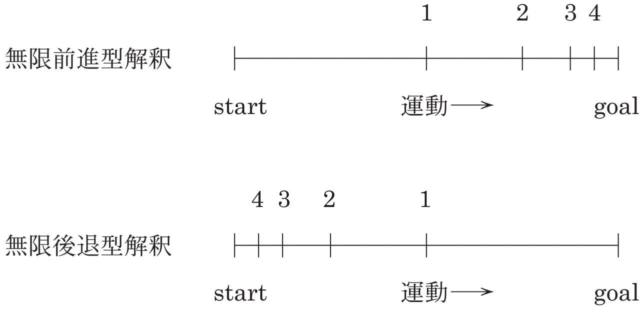
運動に関するゼノンのパラドクスについての直接の報告はアリストテレス『自然学』第６巻第９章の論述の中に見出される。

> 運動についてのゼノンの議論は四つあり，解決しようとする者に困難をもたらす。第一の議論は，移動するものは目標地点へ達するよりも前にその半分の地点に達しなければならないから運動しない，というものであるが，これについては以前の論述（233a21-31）の中で検討した。第二の議論は，いわゆる「アキレウス」であって，以下のような内容である。最も遅い走者は，最も速い走者によっても決して追いつかれることがないだろう。なぜなら，追う者は，追いつく前に，逃げる者が出発した地点へ必ず行かねばならなず，したがって必然的に，より遅い走者は［より速い走者に］常にいくらか先行していなければならないからである。(239b9-18)

無限前進型解釈と無限後退型解釈

パラドクスの解決法について論じる前に，まず，第一パラドクスに関する，無限前進型と無限後退型という二つの解釈のうちの，どちらを採用すべきかについて確定しておく必要がある。無限前進型の解釈は,「半分の地点（τὸ ἥμισυ)」という語句を「残った距離の中間地点」として理解し，運動するものは順に次の「半分の地点」に達することで，限りなく目標地点に近づいて行くと解釈する。これに対して無限後退型の解釈は,「半分の地点」を「初めの半分の距離における中間地点」と理解し，運動するものはそのつど手前の中間地点にあらかじめ達していることが求められる結果，出発地点から少しも動き出すことができなくなる。

図１ 第一パラドクスに関する二つの解釈



この問題に関して，シンプリキオス，ピロポノス等の古代註釈以来，無限後退型による解釈の方が優勢であった[2)]。これに対し，G.ヴラストス，J.バーンズ，山川偉也，P. S.ハスパーは無限前進型の解釈を支持している[3)]。この問題については，明らかに無限前進型の解釈が正しいように思われる。その第一の理由として，ヴラストス等も指摘するように，パラドクスの報告者であるアリストテレスが無限前進型で理解していたことが挙げられる。アリストテレスは先の引用に続く箇所で，第二議論（アキレウス）に関して次のように述べている。

> これも二分割と同じ議論なのであるが，(a) 追加されて行く大きさを二等分には分割しない点で異なっている。確かに，この議論からは，［二分割の場合とは違って］より遅い者は［より速い者によって］追いつかれないことが帰結するが，その結論は二分割と同一の論法に基づいて生ずるのである。（というのは，どちらの議論においても，大きさが何らかの仕方で分割されることによって，(b) 最終地点には到達しないことが帰結するからである。但し，この議論には，詩に歌われた，追うことにおいて最も速い者［アキレウス］でさえ，最も遅い者に追いつけない，ということが付け加わってはいるが。）したがって，必然的に，(c) その解決法も同一である。（239b18-26）

ここから解るように，アリストテレスは「二分割」と「アキレウス」を同じ構造を持つ議論と見なしていた。そして「アキレウス」は亀に限りなく近づいて行く無限前進型であるから，当然アリストテレスは「二分割」も無限前進型で理解していたはずである。実際，上の引用箇所から，「アキレウス」と「二分割」はどちらも，(a) 次々と距離が「追加されて行く（προσλαμβανόμενον, b19-20)」ことによって，(b) 最終地点には到達しないことが帰結する，という形式を持っていたこと，(c) したがって，それらの解決法も同一である，とアリストテレスが考えていたことが解る。（ちなみに，προσλαμβάνειν は LSJ では，‘take or receive besides or in addition’と説明されている。）また，(b) に関して，そもそも無限後退型では，出発地点から一歩も動けないのだから，その場合，最終地点への到達不可能性自体，問題にもならないはずである。いずれにしても，この箇所は，アリストテレスが，第一パラドクスを間違いなく無限前進型の議論として理解していたことを，明瞭に示している。

さらに，決定的であるように思われるのは，アリストテレスが『自然学』第８巻第８章で言及する，「二分割」からの派生型パラドクスの内容が，「二分割」の無限前進型解釈を前提にしない限り理解できなくなることである。彼は次のように述べる。

> そして，ゼノンの議論を質問する者たちに対しても同じ仕方で対処すべきである。彼らは，［或る距離を通過するには］常にその半分を通過しなければならないが，それら半分

> は無限にあり，無限のものどもを通過することは不可能であるかどうかを問うのである。あるいは，或る人々は，この同じ議論を違った仕方で質問する。［すべての距離を通過するに］先立って，半分運動すると同時に，生じて来る半分の地点を一つずつ数えて行くとするなら，その結果，全体の距離を通過した時には無限の数を既に数えてしまったことになるが，それが不可能であることは合意されている，と彼らは考えるのである。(263a4-11)

無限後退型の解釈では各中間点がスタート地点へと限りなく後退して行くように取られるので，その場合，人が無限の数を数え終えるのは「全体の距離を通過した時」ではなくて，むしろ運動体がスタート地点に居る時でなければならないはずである。ところが，上の派生型パラドクスでは，全体の距離を通過した時に，無限の数を既に数え終えていることが問題にされれており，この点で明らかに無限後退型の解釈とは矛盾する。また，もし人がこの論点を認めないとしても，無限後退型解釈に従えば，スタート地点からのどんな微小な距離にも無限の中間点が含まれていることになるから，少なくとも無限の数を数え終わるのが「全体の距離を通過した時」である必然性はないはずである。

だが，もし仮に，上のようなアリストテレスの報告以外に他の誰かによる「二分割」について独自の報告が存在し，それが無限後退型の解釈を支持するような内容を含むのであれば，無限後退型解釈にも文献学的な根拠があると言えるだろう。しかし，実際はそうではなく，上記のアリストテレスの報告以外の独自の報告は全く存在しない。ゼノンによる多の否定のパラドクスに関しては，多くの断片を伝えてくれたシンプリキオスも，運動否定のパラドクスについては，断片を全く伝えていないだけではなく，その論述もアリストテレスの議論をそのままなぞる形で行われている。シンプリキオスは運動否定のパラドクスに関してはアリストテレスの報告以外の情報源を持たなかったというのが，一般的な理解であろう。したがって，少なくとも文献学的見地から言えば，無限後退型の解釈を取る論拠は全くと言っていいほど無いのだ。確かに，シンプリキオスとピロポノスは無限後退型の解釈を行っているが，それはまず第一に，アリストテレスのテキストに関する彼らの理解が十分ではなかったことと，第二に，彼ら自身が無限後退型の議論の方により魅力を感じたことによると思われる。

W.D.ロスをはじめ，無限後退型解釈を採る多くの解釈者がそれを支持する理由は，彼らには，運動一般を否定するという議論の目的からすると，一歩も足を踏み出せなくなる無限後退型解釈の方がパラドクスとしてより強力だと感じられたからである（W.D. Ross 前掲書 p.659)。しかし，そのような印象は実は誤解であり，無限前進型で解釈した場合，目標地点への到達不可能性が任意の距離に関して成り立つから，距離がどれほど短くとも運動体はそこに到達できないことになる。つまりこの解釈によっても，事実上，運動の可能性一般が否定されるのであり，その点については，どちらの解釈を採っても実質的に変わりはない。

いずれにしても，無限後退型の解釈を主張する論者は文献学的にはほとんど根拠のない解釈を，自らの哲学的センスによって選んでいるにすぎない。その意味で，無限後退型解釈は，ゼノン自身によるパラドクスと言うよりも，むしろ後の解釈者がゼノンの第一パラドクスから作り出した，新たな変種と言うべきであろう。

おそらく，この解釈が支持されたもう一つの理由は，先に挙げたアリストテレスの報告において「移動するものは目標地点へ達するよりも前にその半分の地点に達しなければならないから運動しない（239b12-13）」と述べられており，それがあたかも，前もって中間地点へ達することの必要性から直接的に運動の不可能性を導き出しているかのような印象を与えたからではないかと思われる。しかし，次に述べるように，二つのパラドクスはいずれも帰謬法（reductio ad absurdum）を用いて運動の否定を導いてるのであり，中間地点へ到達することの必要性から直接それを導いているのではない。これは，アリストテレスの報告が非常に圧縮された言い回しをしていることから生じた誤解なのである。

第一・第二議論における帰謬法とパラドクス

先の，第二の引用箇所（239b18-26）から解るもう一つの重要な点は，ゼノンの運動否定第一議論には，(i) 運動の存在の否定，(ii) 最終地点への到達不可能性，という二つの帰結が含まれていたということである。これは，第一パラドクスが，(ii) を介して，(i) を導くような帰謬法を用いた議論だったことを示唆しているように思われる。

ゼノンによる議論の多くが帰謬法に拠っていたことは一般に認められている。帰謬法によって最終的に否定される命題をPとすると，それらの議論はそれぞれ全体として次のような形式を取っていたと考えられる。

$$P \to Q\text{．しかるに } \neg Q\text{．ゆえに } \neg P\text{．}$$

運動否定第一・第二議論については，アリストテレスの報告が極めて圧縮されているため，議論の元来の構造を断定することは難しい。とはいえ，それぞれの議論全体を以下のような帰謬法の形に再構成することができ，それは或る程度の蓋然性を持っているように思われる。

第一議論（二分割）

(A) もし或るものが運動するなら，それは運動の出発点とは異なる或る目標地点に到達可能でなければならない。

(B) しかるに，或るものが目標地点に向って運動すると仮定しても，それは決して目標地点に到達するすることができない。［これは (A) に矛盾する。］

(C) ゆえに，いかなるものも運動することはできない。

第二議論（アキレウス）

(A) もし或るものどもが運動するなら，より速いものはより遅いものに追いつくことができるのでなければならない。

(B) しかるに，より速いものがより遅いものの後を追う形で運動すると仮定すると，（両者の速さの差がどれほど大きくても）より速いものはより遅いものに追いつくことができない。［これは (A) に矛盾する。］

(C) ゆえに，いかなるものどもも運動することはできない。

第一議論の最終的な結論が (C)「運動の否定」であったことは，最初に引用した報告の中で明言されており，さらにそれに続く第二の引用箇所から第一議論もまた，目標地点への到達不可能性を帰結するような (B) の段階を経ていたことが解る。したがって，「二分割」においても，(B) を介して (C) を否定するような帰謬法が用いられていたことは確実である。その際，ゼノンは帰謬法における前提 (B) を認めさせるために，我々がパラドクスと見なすような議論を構成したのだ。つまり，ゼノンの第一・第二パラドクスはいずれも，全体として帰謬法を構成する議論の一部分なのである。

ところで，第一・第二パラドクスが運動を否定する議論の一部であったと考える場合，一見奇妙に思われるのは，パラドクスの中で運動そのものが容認されていることである。実際，「二分割」においては，目標地点までの半分の距離を運動することが容認されており，また「アキレウス」においても，追う者は出発した時に追われる者が居た地点まで運動することが容認されている。しかし，上の (B) の理解が正しいなら，それは単純に P（運動の存在）を認めているのではなく，むしろ P を仮定した場合にどのような事態が帰結するかを述べているのだと考えられよう。その場合, (B) は本質的に $P \to \neg Q$ という構造を持っていることになる。これを, (A) における $P \to Q$ と合わせると，ゼノンの二つの議論の全体はいずれも，

(i) $P \to Q$　(ii) $P \to \neg Q$　(iii) $P \to Q \wedge \neg Q$　(iv) $\neg(Q \wedge \neg Q)$　(v) $\neg P$

という形式の，アンチノミーを含み込むような帰謬法を成していたことになろう。

さて, 次に,「二分割」および「アキレウス」に対する数多くの解決法のうちで, 最も一般的な, そして小論の問題設定と最も関わりの深い二つの解決法（アリストテレスの第一の解決法および無限等比級数の収束による解決法）について順に検討することにしたい。

2．最も一般的な二つの解決法

アリストテレスによる第一の解決法

アリストテレスは『自然学』第6巻第2章において，第一・第二パラドクスを，有限時間内

に無限の空間的距離を通過することの不可能性に基づく議論だと解釈している。彼は，これに対し，時間もまた無限分割可能であることを指摘することによって，パラドクスを解決しようとする。アリストテレスは 233a21-31で次のように述べる。

> それ故, ゼノンの議論も, 有限な時間において無限の［距離］を通過できない, あるいは, 無限の［点］に一つずつ触れて行くことはできない，という虚偽の仮定に基づいているのである。というのは，距離も時間も，一般にすべて連続的なものは，二通りの意味で無限と言われるのであり，分割に関して無限であるか，際限において無限であるか，のいずれかである。だから確かに，有限な時間においては，量に関して無限なものに触れて行くことはできないが，分割に関して無限な［点］に触れて行くことはできる。なぜなら，時間自体もまた，そのような意味において無限だからである。したがって，有限な時間においてではなしに, 無限の時間において無限の［距離］を通過することになり, また, 有限の［時刻点］によってではなしに，無限の［時刻点］によって無限の［点］に触れていくことになるのである。(233a21-31)

しかし，私はこのようなアリストテレスの解釈と解決法は，ゼノンのパラドクスの本質を見誤ったものだと思う。以下にその理由を列挙していく。

まず第一に，先に挙げた，アリストテレスによる「二分割」と「アキレウス」の報告 (239b9-18) には時間への言及が無い。これは本来のゼノンの議論自体に時間への言及が含まれていなかったことを示唆する[4)]。もしも二つのパラドクスの本質が，アリストテレスの言うように，空間的距離の無限性と時間の有限性との間の矛盾にあるとするなら，本来のパラドクスの報告の中に「有限な時間において」という語句があってしかるべきであろう，ところが時間の有限性への言及どころか，そもそも時間への言及自体が無いのである。にもかかわらず，我々はそのような報告を通じて，運動体が目標地点に到達できないことも，アキレウスが亀に追いつけないことも了解してしまう。とすれば，二つのパラドクスは「空間的距離の無限性」と「時間の有限性」との対比に依存していない可能性がある。

第二に，アリストテレスのこの解釈においてパラドクスは「有限な時間において無限の距離を通過することはできない」という形に抽象化されてしまい，その場合には，運動において空間的距離を二分割して行く過程も，アキレウスが亀の元居た地点を一つ一つ通過して行く過程も，一切言及する必要がなくなる。この解釈においては，二分割もアキレウスと亀の競走も，距離の無限分割可能性を意識させるための手段にすぎず，副次的な意味しか持たない。アリストテレスによって言い換えられた形のパラドクスにおいては具体的な分割の手続きは空間的距離の（分割による）無限性への言及によって置き換えられる。ところが本来のゼノンのパラド

クスにおいては，時間への言及が無いだけでなく，空間の無限性への言及も無い。確かに，運動する距離の二分割やアキレウスが亀の元居た位置へ達することの繰り返しを通じて，ゼノンの議論を聴く者に無限性が意識されることは事実であり，このパラドクスに無限の問題が深く関わっていることは間違いない。だが，だからといってそれらの議論を単純な無限性の問題に抽象化してよいものであろうか。私は，二つのパラドクスにおいてゼノンが用いた分割の特殊な手続き自体が果たしている役割を過小評価すべきではないと考える。

以上の二つの疑問点はいわば，状況証拠のようなものでしかないが，次の考察は私には決定的であるように思われる。いま仮に，運動するものが各中間地点への無限回の到達を実現したと仮定しよう。また，アキレウスが，亀の元居た位置への無限回の到達を実現した，と仮定しよう。その場合，果たして運動するものは目標地点に到達しているであろうか。また，アキレウスは亀に追いついているであろうか。アリストテレスの解釈によれば，無限の距離の通過不可能性が問題なのであるから，もし仮に（無限の距離と無限の時間との対応づけを通じて）無限の過程が許容されるならば，第一議論における運動体は目標地点に到達でき，また第二議論におけるアキレウスは亀に追いつけるのでなければならない。

ところが，仮に無限の過程を許容したとしても，ゼノンが提示する手続きに従うなら，運動体の目標地点への到達も，アキレウスによる亀への追いつきも，あり得ないはずである。というのは，仮に第一パラドクスにおいて出発地点から目標地点までの距離を 1 で表し，それぞれの中間地点への到達回数をnで表せば，各中間地点から目標地点までの距離は，$(1/2)^n$ で表すことができ，無限の過程を通じて運動体が占めることのできるあらゆる中間地点での残存距離は $(1/2)^n$ の値から成る無限集合を形成する。そして，もしそのような無限の過程によって運動体が目標地点に到達できるなら，この無限集合にはその要素として 0 が含まれていなければならない。しかし，$(1/2)^n$ の値は決して 0 と一致しない。確かに「$n \to \infty$ のとき $(1/2)^n \to 0$」とは言えるにしても，$(1/2)^n$ が極限値としての 0 に収束するということは，それが「限りなく 0 に近づく」ということであり，$(1/2)^n$ の或る値が 0 と完全に一致することを意味しないのである[5)]。だから，ゼノンの論法に従う限り，仮に無限の過程が実現したとしても，運動体は目標地点に到達できない。全く同様のことが，アキレウスと亀との間の距離についても言える。したがって，アリストテレスによるパラドクスの解釈とその解決法はこの点で誤っている（少なくとも不十分である）ことになる。

確かに「二分割」と「アキレウス」において距離の無限分割がパラドクスを生じさせているという点は間違いとは言えない。しかし，それらがただの無限分割ではなしに，特殊な仕方での無限分割であることこそが問題なのである。もし仮に，問題のパラドクスが，数直線上の出発地点を 0，目標地点を 1 とし，区間［0, 1］の中にあるすべての点で（つまり，この区間内のすべての実数の値において）分割するものだったとする。その場合には，アリストテレスが

『自然学』第6巻で述べた解決法で問題なく解決できる。なぜなら，この区間の運動に対応する時間もまた，同じ数だけの分割点を持つのだから，この区間における最後の分割点1と，時間の最後の分割点とが対応するはずであり，そのことは目標地点への到達を意味するからである。しかし，ゼノンの第一・第二パラドクスにおける分割はこのようなものではなく，無限の分割地点の中に目標地点が決して現れないような分割なのだ。この場合，時間を無限分割し，その最後の時刻点を目標地点に対応させようとしても，目標地点の方は分割点の集合の中に含まれていないから，両者を対応させることはできないのである[6)]。

以上見たように，このアリストテレスによる最初の解釈と解決法は，ゼノンのパラドクスの核心を突くものではない。後に彼は『自然学』第8巻第8章（263a11-b9）において，この解釈と解決策の不十分さに気づき，第二の解決法を提案することになる[7)]。とは言え，アリストテレスによるこの第一の解決法が，二つのパラドクスを解決する上での大きな前進であったことは確かである。それによって，空間を分割した際に生じる無限それ自体は運動と何ら矛盾するものではないことが明らかになり，後顧の憂え無く，考察の舳先（へさき）を，パラドクスにおいて矛盾を生み出している当のものへと向けることができるからである。

無限等比級数の収束に基づく解決法

これは，古くはデカルトが示唆し，多くの数学者と一部の哲学者が提唱する解決法である[8)]。第一・第二パラドクスにおいて，それぞれの手続きに従って区切られていく各小区間は，アキレウスと亀が等速運動すると仮定すれば，どちらのパラドクスにおいても無限等比数列を形成する。例えば，第一パラドクスにおいて，区間全体の距離を1とすれば一連の小区間は，初項$a=1/2$，公比$r=1/2$の無限等比数列となる。また第二パラドクスでも，アキレウスと亀の最初の距離を1/2と仮定し，アキレウスは亀の2倍の速度で走ると仮定すれば，一連の小区間は初項$a=1/2$, 公比$r=1/2$の無限等比数列となる。これらの数列の各項を次々に加えていけば，無限等比級数の和の公式から，第一パラドクスにおける運動体と第二パラドクスにおけるアキレウスの全移動距離は，有限の値1に収束するから，ゼノンの議論に従ったとしても，運動体は目標地点に到達でき，アキレウスは亀に追いつけるというのである（また，時間に関して同様の議論を適用し，亀に追いつくために要する時間が有限の値に収束することを示す場合もある）。

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} = 1$$

しかし，既に指摘したように，無限等比級数が「極限としての或る値に収束する」ということは，その数列に含まれるすべて項の和が「当の値と完全に一致する」ことを意味しない。だ

とすれば，運動体のいずれの到達地点も「極限値」としての目標地点に完全には一致せず，したがって，運動体は無限等比級数の収束によっては目標地点に決して到達できないことになる。結局，この解決法は（もしアキレウスが亀に追いつくとしたらどの地点で追いつくか，を示しはするが）アキレウスが亀に追いつくこと自体は示すことができないのである。

しかし，次のように言う人がいるかもしれない。「二つのパラドクスで問題になる無限等比級数は，或る距離を無限に分割し，それらすべてをもう一度足し合わせた合計なのではないか。だとすれば，無限の部分を足し合わせた合計は，最初の全体とぴったり一致するはずだ。」残念ながら，この主張は誤りである。仮に無限等比級数の極限値を分割する前の全体と見なしても，無限等比数列の各項を加算することで得られる合計は，分割以前の全体（つまり極限値）と完全には一致しない。このことは，数列の各項の和がいかなる作業（operation）によって得られるか，を考察することで明らかになる。ここでは，初項1/2，公比1/2の等比数列について検討しよう。加算作業が無限に続けられた場合の極限値（分割前の全体の値）は1である。さて，ここに長さ1の棒があったとする。(1) まず，初項はこの棒を半分に切った値，つまり1/2になる。残りの半分は切り落とされている。(2) 切り落とした半分をさらに二分割して1/4の棒を手にし，その片割れである1/4を切り落とす。そして残った二つの棒を足し合わせて1/2＋1/4＝3/4を得る。(3) さらに，切り落としてあった1/4を二分割して半分の1/8を手にし，その片割れである1/8を切り落とす。そして残った三つの棒を足し合わせ，1/2＋1/4＋1/8＝7/8 を得る……（以下同じ)。もうお気づきだろう。この作業を行う上での絶対的条件は，最後の作業で得られた断片の片割れが必ず残されていること，そしてそれが，足し合わせた合計に含まれないことである。この作業規則を遵守する限り，足し合わせた合計が当初の全体と一致することはあり得ない。作業の定義自体がそのことと矛盾するのだ。作業の回数を有限回から無限回へと拡張してもこの点に変わりはない。そして，そもそもこの作業を無限に続けて行けるのも，新たな操作を加える対象としての片割れが，得られた合計とは別に，常に残されているからなのである[9]。

ただ，次のようには言える。無限等比級数の作業によって得られる値は，その極限値と実質的には区別できない。なぜなら，無限等比級数の作業によって究極的に得られる値を数直線の線分の長さによって示すとするなら，それは半開区間［0, 1）の長さ，つまり点1を含まない長さ1になるはずだからである。その区間の最後の点が欠けているとしても，点には大きさが無いから，［0, 1）の長さは［0, 1］の長さと実質的には同じであり，両方の長さを区別できない。しかし，両者は集合論的には全く異なっているのであり，この集合論的差異は二つのパラドクスにとって決定的なのだ。

既に指摘したように，この解決法はアキレウスが亀に追いつくこと自体を決して示すことができない。もしこの解決法によってそれを示せると主張するなら，それは明らかに数学的原則

に反している。にもかかわらず，かなり多くの数学者がゼノンのパラドクスはこの解決法によって解決済みだと考えているのは驚くべきことである。彼らによれば，一般の人々がゼノンのパラドクスに困惑するのは，無限の諸部分を加算して行ってもその総計は有限の値に収束する場合があることを理解していないからだという。確かに，もしも人々が「無限の諸部分を加えればその総計は必ず無限大になる」という偏見を懐いており，そのことが彼らの困惑の主な原因であれば，この解決法は有効だと言えるだろう。しかし，そのような誤解が皆無とは言えないにしても，多くの人がゼノンのパラドクスに困惑するのは，そのような理由によるのではない。困惑の真の原因は，ゼノンが示す手順に従った場合，亀に追いつく作業には原理的に最後の項があり得ないことに気づき，このことから，その無限の過程の中には到達すべき最後の点が決して現れないことを直観的に理解するからなのである。

さて，以上の考察が示唆するのは，次のことであろう。第一・第二パラドクスにおいて，運動体が目標地点に到達できず，アキレウスが亀に追いつけない理由は，運動が無限の部分から成ること自体に起因するのではなく，むしろそれらの中から目標となる最後の一点を消し去る作業手順に起因する，ということである。そのような手続きに従う結果，走者は，いわばゴール地点の無いレースを走るよう強いられることになるのだ。

3．第一・第二議論におけるアルゴリズムと無限ループ

ゼノンによる運動のアルゴリズム

ここで，第一・第二議論が運動を記述する際に，運動するものが従っていると見なされる過程（手続き）を，コンピュータのアルゴリズムを模して，以下のように定式化してみたい。（ここでは仮に，第一議論における目標地点までの距離，および第二議論におけるスタート時点でのアキレウスから亀までの距離を，いずれも１としておく。）

第一議論（アルゴリズム-Z_1）

Step1　目標地点までの距離（x）を１とせよ。

Step2　x の中間地点まで進め。

Step3　x＝0 なら停止し，x＞0 なら Step2 に戻れ。

第二議論（アルゴリズム-Z_2）

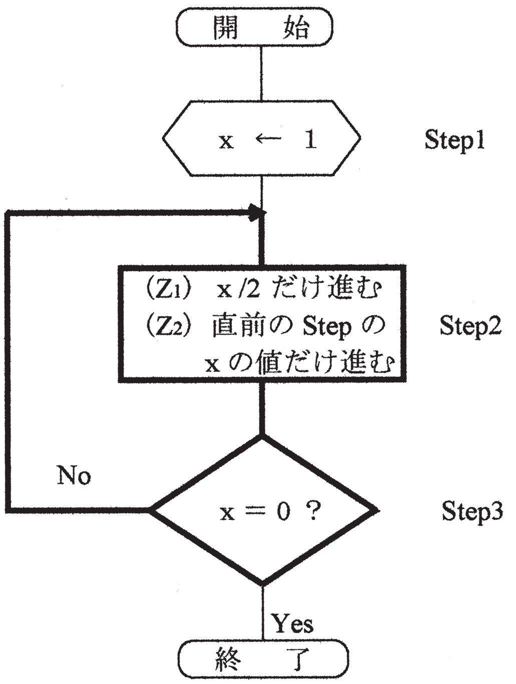
Step1　亀との距離（x）を１とせよ。

Step2　直前の Step における x の値だけ進め。

Step3　x＝0 なら停止し，x＞0 なら Step2 に戻れ。

どちらの手続きのStep3においても，決してx＝0とはならないから，このアルゴリズムは無限ループを形成し，それらを実行する作業はStep2とStep3との間を循環し続ける。運動体が目標地点に到達できないのも，アキレウスが亀に追いつけないのも，ゼノンの論法が運動過程の或る種の記述を通じて，我々の思考を無限ループへと導くからなのである[10)]。走者はこの無限ループから決して抜け出すことができない。目標地点に到達する可能性は，この手順に従う限り原理的に封じられている。とすれば，これらの作業手順は，当の課題を達成する「解法」という意味でのアルゴリズムではなく，むしろ，それらのアルゴリズムであるかのように偽装されたものであり，その意味で，「疑似アルゴリズム（pseudo-algorithm）」と呼ばれるべきであることになろう。それぞれのパラドクスにおいて運動するものが目標地点に到達できないのは，それらが誤ったアルゴリズムを採用したからなのである。

図２　アルゴリズム-Zのフローチャート



実際，我々が目標地点に向かって走る時には，そのような手順に従っているわけではない。我々は単に「全力で目標地点へ向かって走る」（あるいは，もしお好みなら「まず全走路の半分の距離を走り，次に残りの半分を走る」という手順でも良い）。ところが，ゼノンはその論法により，我々の思考の中で，現実の走者が，「まず全走路の中間地点まで走り，次に残った

距離の中間地点まで走り，次に……」という手順に従っているかのように錯覚させる。そして，このことによって，我々の思考の中の走者と現実の走者の間に乖離が生じるのだ。現実の走者はそのようなアルゴリズムに従っていないため悠々とゴールに到り着くが，一方，思考の中の走者は，誤ったアルゴリズムを与えられたため，無限ループという迷宮の中をさまよい続けるのである。

パラドクスの核心

しかし，今述べた内容は，最終的解決には程遠いものである。次の二つの疑問について考えてみよう。

第一に，上の議論は，ゼノンが「もし運動が存在するなら，そのような手順によって目標に到達できなければならない」と考えたことを前提にしている。（そう理解することによってこそ典型的な帰謬法を構成できるのであるから，この前提にはそれなりの根拠がある。）その場合，彼はその作業手順を当の課題を達成するための必要十分条件と見なしていたことになるだろう。しかし，この点には疑問の余地がある。アリストテレスの報告には，それが必要十分条件と見なされていたことを明示するようなことばは無く，単に「運動するものは目標に到達する前に，これこれの地点に達しなければならない」という述べ方がされているだけである。このことからすれば，それらのアルゴリズムは目標地点に達するための必要十分条件を満たすものとしてではなく，必要条件のみを満たすような作業手順として挙げられた可能性がある。

そして，ゼノンがそれらの作業手順をどちらの意味で解していたかという問題を別にしても，そのような地点へ達することが目標地点に到達するための必要条件だということ自体は真であり，現実の走者もまた何らかの仕方でこの必要条件を満たさなければならない。つまり，彼もそのような無限ループが生み出す無限の点と同じものに達することなしには目標地点に到達できない。とすれば，現実の走者は目標地点に到達するまでに何らかの仕方で無限ループから脱出できているのでなければならない。しかし，無限ループから脱出することは原理的に不可能である。とすれば，パラドクスから生ずる矛盾は未だに解消していないのではないか。

第二に，問題の無限ループには終わりがなく，またそれが生み出す無限の通過点にも終わりがない。しかし，走者が目標地点に達したということは，終わりのない無限の過程が終わったこと，即ち，終わりのない無限の点への到達が終わったことを含意しているはずである。しかし，「終わりのないものが終わる」とは一体何を意味しているのか。それ自体が矛盾ではないか[11)]。

第一の疑問と第二の疑問は，実質的には同じ問題への言及だということは容易に見て取れよう。しかし，それぞれの疑問に答えることの困難さは，同等ではない。第二の疑問の方が難しいのである。そしてこの第二の疑問は，「二分割」からの派生型パラドクスが提起した問題と共通のものである。問題の派生型パラドクスは，運動体が中間地点に達する度に一つずつ数を

数えていくなら, 運動体が目標地点に到達した時には無限の数を数え終わっていることになる, という議論であった。この帰結が含む矛盾は, 数（自然数）には終わりがなく, したがって数を数える作業にも終わりはあり得ない, ということに基づいている。運動には明らかに「或る特定の目標地点への到達」という終わりが存在しているにもかかわらず, この運動に対応するはずの数える作業では, 原理的に「無限の数を数え終わる」ことはあり得ない。そして, もし「運動の完了」が必然的に「中間地点を数え終わる」ことを伴うなら, 後者の否定は必然的に前者の否定を帰結するであろう。

現実の走者と無限ループ

以上の疑問に対し根本から答えることは, 小論の後半まで待たねばならないが, さしあたって, 第一の疑問については, ここで可能な範囲で答えておくことにしたい。第一の疑問において述べられた, 現実の走者が「無限ループから脱出する」という表現は正確ではない。彼はそのようなアルゴリズムに従っているわけではないのだから,「無限ループから」脱出するのではなくて,「無限ループによって記述される領域から」脱出するのである。ここで問題のアルゴリズムがごく限られた領域しか扱えないことに注意しよう。数直線において出発地点をs, 目標地点をg, 運動体の位置をmとすると, アルゴリズム-Z が扱えるのは $s \leqq m < g$ の範囲（以後, ［ s, g ）と表記）であり, 点gおよびその先の領域は扱うことができない。このため, 我々の思考の中の, アルゴリズム-Z に従っている走者は, 確かに当のアルゴリズムが提示する無限ループとその支配領域である ［ s, g ） を脱出することができない。しかし, 現実の走者は, アルゴリズム-Z の観点から記述されることは可能であるにせよ, アルゴリズム-Z に従っているわけではないのだから, 当然, その支配領域である ［ s, g ） の区間を抜け出てしまう。とは言え, この走者もまた ［ s, g ） の領域に居る間は, 付帯的にはアルゴリズム-Z によって記述され得るし, 当然その記述の中には無限ループが現れているはずである。だが, そのことは, 無限ループの領域の外（点 g およびその先の領域）へ移動することを何ら妨げない。現実の走者が無限ループを脱出するように見えるのは, 実は, 彼がアルゴリズム-Z に基づく無限ループによって記述可能な領域から, それによっては記述不可能な領域へと移動したという事態に他ならないのである。

4．或る思考実験 ── アルゴリズム-Z に従ったレースの結果報告 ──

最初の思考実験

以上の分析を確かめるために, 次のような思考実験を提案したい。第一・第二議論の作業手順に従って実際に走路を走る場合, どのような事態が生じるかを考えるのである。その際, そ

れぞれの走者は，アルゴリズム-Zが指定する作業以外は何も行ってはならないことにしよう。そこで，それらの走りを通じて，ゼノンの議論と我々の経験や数学的原則との間に説明できない矛盾が生じるなら，第一・第二パラドクスに対するこれまでの方針が誤っていることになろう。だが，もしそれらの走りを，我々の経験にも数学的原則にも矛盾することなく説明し得るなら，ゼノンの議論はパラドクスではなくなり，その結果，これまでの分析が正しい方向に進んでいることが確認されるであろう。

まず，第一パラドクスの走者として，アキレウスに追われる者の立場を亀に奪われて今や失意のどん底にあるヘクトールに登場してもらうことにしよう。彼にはあらかじめ,「まずスタート地点からゴールまでの中間地点に達し，次に，残った距離の中間地点に達し，さらに……」という手順に従って進むよう，指示を与えてある。スタートの合図とともにヘクトールは喜び勇んで走り始め，次々と中間地点を通過して行く。さて，我々はゴール地点で何を見るであろうか。ゴールライン寸前で急停止しているヘクトールの姿である。なぜなら，ゴール地点に足を踏み入れることは，事前に指定したアルゴリズムから逸脱することであり，規則違反に問われるからである。そもそも彼に与られえた規則を適用できる範囲はゴール直前までであって，ゴール地点とその先の領域は規則の適用範囲に含まれていなかったのだ。

さて次に，アキレウスと亀の登場である。アキレウスは明らかにこのような相手と競走することに不本意な様子で，しかもアキレウスが進む速度を亀の速度のちょうど２倍にするよう告げられ，怒りで顔を真っ赤にしている。彼にはあらかじめ，「まずスタート時点での亀の位置まで進み, 次に, その位置に達した時に亀が居た地点へと進み, さらに……」という手順に従って進むよう，指示を与えてある。アキレウスと亀はスタート前，1/2kmだけ離れており，両者は合図と同時に出発する。亀の速度が時速1/2kmだとすれば, アキレウスは１時間後, スタート地点からちょうど１km離れた地点で亀に追いつくはずである。しかし，そこで我々が目にするのは，亀の鼻先に追いつく寸前に急ブレーキをかけ，亀と同じ位置に達するすれすれの状態を保ったまま，亀と同じ速度で進むアキレウスの姿である。なぜなら，亀と同じ位置に達することは，事前に指定したアルゴリズムから逸脱することであり，規則違反に問われるからである。そもそも彼に与えられた規則を適用できる範囲は亀に追いつく直前までであって，アキレウスが既に亀に追いついた状態の相対的位置関係は規則の適用範囲に含まれていなかったのだ。こうして，アキレウスと亀は肩を並べてノロノロ進み，もしこの競走にゴールラインが存在するなら，相次いでゴールインする（そして当然，亀が勝つ)。一方，もしこのレースが亀に追いつくことだけを目的とするもので，ゴールラインを設けていないなら，両者並んでそのまま地平線の彼方へ消えて行くだろう。

ゼノンの論法に従って行われたレースのいずれの結果も,「運動するものは目標地点に到達できない」「アキレウスは亀に追いつけない」という彼の結論に合致しているにもかかわらず,

我々の経験にも矛盾していない。したがって，ゼノンによる運動否定の第一・第二議論はパラドクスではないと結論できそうである。

だが, 上の思考実験は非常に不正確なものである。それどころか数学的には誤りですらある。その理由の一つは，第一パラドクスにおけるゴール直前での停止や，第二パラドクスにおける亀に追いつく直前の急激な速度変化を，ゼノン自身が認めたようには思えないということである。そして，もしも急停止や急減速を認めず，ヘクトールとアキレウスに常に一定の速度で進むことを強制するなら，彼らは必然的にゴール地点や亀に到達してしまい，その結果，規則違反を犯したと見なされるだろう。さらに困ったことに，彼らが一定速度で進むことになれば，アルゴリズム-Z には，空間的距離における適用範囲だけでなく，時間における適用範囲もまた生じてしまうことになろう。元来，ゼノンの議論には時間への直接的な言及がなく，そのため上の思考実験においては時間に関して自由に扱うことが可能だった。しかし，走者の速度を一定にすることになれば，走者の空間的位置と時間とが一対一に対応して予測されることになり，したがって二人の存在可能範囲は空間的に制限を受けるだけではなく，時間的にも制限されてしまうのである。ヘクトールは，ゴール地点に達するはずの時刻とそれ以後の時間帯には存在できなくなるし，同様にアキレウスも，亀に追いつく時刻とそれ以後の時間帯には存在できなくなる。

第二の理由はさらに深刻である。ヘクトールがゴール寸前の位置で停止することや，アキレウスが亀に追いつく寸前の位置を保ち続けるということは，数学的にはあり得ないことだからである。なぜなら，その際，ヘクトールとゴール地点との距離も，アキレウスと亀との距離も，0 であってはならない。もし 0 だったら，ヘクトールはゴールに達しており，アキレウスは亀に追いついていることになるからである。一方，それらの距離は 0 より大きくてもいけない。というのは，もし僅かでも距離があるなら，その距離は無限に分割され，その間に無限の点が存在することになって，ヘクトールもアキレウスもそれぞれの規則が指定した作業を未だ成し遂げていないことになるから。つまり，ヘクトールが急停止する位置も，アキレウスが急減速する位置も，初めから存在していないのだ。

修正版思考実験

とすれば，この思考実験の結果報告は誤りであり，ゼノンによる運動否定の第一・第二議論がパラドクスではないと断じた，先ほどの結論は撤回しなければならないのだろうか。だが，上記の問題点を含まないように修正された同様の思考実験が可能である。上のような問題が生じるのは，その思考実験においては，アルゴリズム-Z の適用範囲外の空間的距離や時間帯にもヘクトールとアキレウスが存在し続け，その際アルゴリズム-Z によっては彼らが存在すべき空間的・時間的領域を指定できないからであった。さてここで，この二人と一匹が或る超能力

を有する仮定しよう。彼らは，任意の場所と時間において自らの存在を消すことができる特殊な能力を具えており，自分が或る時刻に存在するか存在しないかを，事前に決定しておけるものとする。そこで，ヘクトールはゴール地点に到るまでは存在し続け，ゴール地点に達するはずの時刻とそれ以後の時間帯には存在しないことに決めておく。また，アキレウスと亀も，アキレウスが亀に追いつくはずの時刻とそれ以後の時間帯には存在しないことに決めておく。するといずれの走者も，目標に到るまでのあらゆる瞬間にアルゴリズム-Zが指定する場所に存在するが，目標に達するはずの時刻には彼らはもはやどこにも存在していないことになる。そしてこの場合，ヘクトールとアキレウスは，ゼノンが指定した作業手順に厳密に従いながら，終わりのない無限の地点を通過するにもかかわらず，目標には決して達することがないのである。

ゼノンの議論に従った結果は，その結論に完全に合致すると同時に，数学的原則とも，我々の経験とも矛盾しない。このことから，ゼノンの運動否定の第一・第二議論はパラドクスとしての資格を失うと結論して良いようにも思われる。だが，この結論を最終的に下すのは，これまで棚上げにしてきた問題，即ち「終わりのない無限の過程を終える」こと自体が矛盾ではないか，という問題に正当な答えを与えてからでなければならない。

５．終わりのない無限の「完了」

「終わりのない無限」と「終わりのある無限」

一般には「無限なもの＝終わりのないもの」と見なされることが多い。これは「無限」という語が元来，「限界の無いこと」を意味したからである。しかし，文字通りの意味で「無限なもの＝終わりのないもの」と考えるのは正しくない。例えば，数直線上の０から１までのあらゆる点を含む線分を考えてみよう。この線分は，０から１までのすべての実数に対応する無限個の点を含んでいるにもかかわらず, 間違いなく「終わり」がある。１または０がそれである。そして，運動体がこの０から１までの区間を運動する場合には，到達すべき最後の項，即ち点１が存在し，それがこの線分に含まれるあらゆる点の値の最大値となっている。これに対し，やはり無限である自然数にはそのような最大値となる最後の項が存在しない。つまり,「終わり」という語を，大きさの順序における「最後の項」として理解する場合，無限には，終わりのある無限と終わりのない無限の両方があるのだ。そして，通常の走路は終わりのある無限であるが，アルゴリズム-Zの有効領域である半開区間［ s, g ）には点 g が欠けているため，それは終わりのない無限を形成しているのである。このことを念頭に置いた上で，次の考察へ進むことにしよう。

「終わりのない無限の過程が終わる」という矛盾

ここでは，二つのパラドクスの核心となる問いに答えることを試みるが，自問自答が延々と続くのを避けるために，我々と同時代のＺ氏に登場してもらい，この問題に関する彼の見解を聴くことにしよう。Ｚ氏は次のように述べるであろう。

「走者が目標地点ｇに到達できないのは，その可能性がアルゴリズム-Ｚによって原理的に排除されているからだ，という君の主張については認めることにしよう。だが，走者がアルゴリズム-Ｚに従う場合でも，彼は本来の走路から点ｇを除いた半開区間［ｓ, ｇ）なら走破できるはずだ。この区間はアルゴリズム-Ｚの適用範囲なのだから。ところが，走者がこの半開区間を走破する可能性について検討してみると，二つのパラドクスの核心となる困難がそのままこの区間の中へ持ち越されており，それは何ら解決されていないことが明らかになるのだ。

走者は目標地点ｇに達するより前に，半開区間［s, g）に含まれるすべての点への到達を終えていなければならない。このことは点ｇに達するための必要条件である。ところで，この区間においては，アルゴリズム-Ｚが指定する無限の中間地点も，それらを含む連続体としての無限の点も，どちらも終わりのない無限を形成している。だから，もし現実の走者が目標地点ｇに到達するとすれば，彼はそれより前に終わりのない無限の点への到達を終えているのでなければならない。しかし，『終わりのない無限の過程が終わる』ということ自体が自己矛盾であり不可能なことなのだ。だから，走者は点ｇに達するための必要条件を決して満たすことができない。とすれば，やはりゼノンが言うように，運動体が目標地点に到達することは不可能だと結論しなければならない。」

「終わる」と「完了する」

この問題を解く上で，まず指摘したいのは，「終わりのない無限の過程を終える」という表現自体が形式上の矛盾を含んでしまうという点である。この表現において「終わる」という動詞が使用されていることが矛盾を生み出しているように見える。もし或る過程が無限に続くとしても，それらの過程に終わり（最後の項）が存在する場合には，その過程が「終わった」と表現することに問題はない。しかし，終わりが存在しないタイプの無限について，それらの過程全体が完結したことを「終わった」と表現することは不適切である。というのは，「終わる」という動詞と「終わり」という名詞の間に語義的な派生関係があるため，「終わる」という表現を使った場合には「終わり（最後の項）が存在する」ことを含意してしまうからである。これに対し，ほぼ同様の意味を持つ「完了する」という動詞は，「最後の項が存在する」ことを含意しない。そこで，「終わる」「終える」という動詞を「最後の項が存在する過程」だけに限

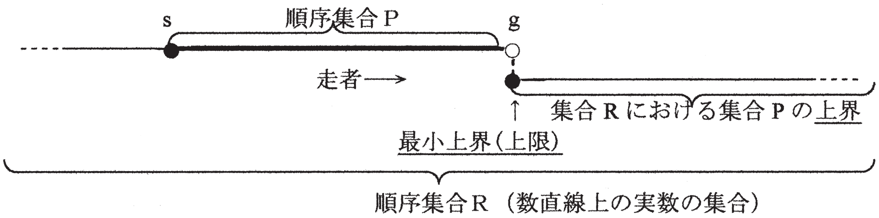
定して使用し，「最後の項が存在しない過程」には「完了する」という動詞を用いることにしたい。但し，「完了する」という語の方は，「最後の項」が存在しない過程だけではなく，「最後の項」が存在する過程についても使用できるものとする。

さて，通常のレースでは，その区間［s, g］の中に最後の項（点g）が存在しており，したがって走者が点gに達した時，我々は，彼が無限の過程を「終えた」と言うことができる。しかし，この走路から点gを取り除いた半開区間［s, g）を走る場合には，仮に走者がその無限の過程全体を完結させたとしても，それを「終えた」と言うべきではない。むしろ，「彼は無限の過程を完了した」と言うべきなのである。

運動における終わりのない無限の「完了」

次に考察すべきは，半開区間［s, g）を運動するものは，その過程をいつ完了するのか，という問題である。通常の閉区間［s, g］であれば，「最後の点gに達した時」と答えることができる。しかし，この半開区間には最後の点が存在しない。この場合，「走者はその過程をいつ完了したか」という問いに対する答も存在しないのだろうか。実は，半開区間においても，その運動の過程が完了するのは，走者が区間外の点gに達した時なのである。なぜなら，その区間には最後の点が存在しないため，走者が当の半開区間内に居る限り，彼が居る地点と点gとの間に必ず微小な間隔が残されることになって，その結果，彼は走りを未だ完了していないことになるからである。したがって，走者がこの半開区間の走りを完了するのは，彼がこの区間の外に出た時，即ち，区間外の最初の点であるgに到達した時なのである。

図３　順序関係≦に基づく順序集合Ｒとその部分集合Ｐ



このことを集合論的に表現すると，上のようになる（図３を参照）。数直線上の実数に対応する点から成る集合は，順序関係≦に基づく順序集合Rであり，半開区間［s, g）に含まれる点の順序集合Pはその部分集合である。順序集合Pには「終わり（最後の項）」となるような最大元（maximum）が存在しない。だがPには，それを部分集合として含む集合Rにおける上界（upper bound）が存在する[12)]。点gはその最小上界（＝上限）である。つまり，走者は，集合Rにおける，部分集合Pの上界に達することによって，Pに属するすべての点への到達を完

了するのである。

したがって，Z氏が述べた「走者は目標地点gに達するより前に，半開区間［s, g）に含まれるすべての点への到達を終えていなければならない」という主張は誤りである。走者が点gに到達するのと，半開区間［s, g）の通過が完了するのは，同時であり，二つの事態を切り離すことはできないのだ。逆に言うと，もし走者が点gに到達できないなら，その走者は半開区間［s, g）の走破を完了できない。実際，先ほどの思考実験におけるヘクトールは，もはや点gには存在していないから，彼は走破した区間全体を定義できず，そのため「ヘクトールは終わりのない無限の過程を完了した」と言うことができないのである。こうして，アルゴリズム-Zは当の課題達成の十分条件を満たせないだけでなく，半開区間［s, g）の走りを完了するという必要条件すら満たせないことが明らかになる。

6．運動と作業・演算（オペレーション）

アルゴリズム-Zによる運動の記述から生じる困難

この説明を聞いてZ氏はしばらく考えているが，やがて次のように語り始める。

「確かに，現実の走者による半開区間［s, g）の走りを，アルゴリズム-Zとは無関係に行われた運動と見なした場合には，矛盾に陥ることなしに『走者は終わりのない無限の過程を完了した』と言うことができるかもしれない。だが，その同じ過程をアルゴリズム-Zの観点から記述することもできるはずだ。そして現実の走者による半開区間［s, g）の走りを，アルゴリズム-Zの観点から，或る終わりのない作業（operation）として記述した場合，果たして同じ議論が成り立つだろうか。いや，いかなる作業も，相互に独立した各ステップから成る作業である限り，『すべての作業が完了した状態』は，必ず『最後の作業が終った状態』として記述されねばならないのではないか。私は『最後の作業が終わること無しにすべての作業が完了する』ような作業を想像できない。そして，この違いはアルゴリズム-Zに基づく記述の中に或る矛盾と齟齬を引き起こすはずだ。

さて，今度は私の方から思考実験を提案しよう。ヘクトールが目標地点めがけて走って行く際，同時に，無限の計算速度を持つコンピュータが或る演算（operation）を行っていると仮定する。このコンピュータにはアルゴリズム-Zに基づくプログラムが組み込まれており，ヘクトールが走路の各中間地点に達する瞬間ごとに，残っていた距離の1/2の値をはじきだす。そして，一つ演算を行う度に次の演算の速度は二倍になり，それぞれの演算に要する時間は直前の演算に要した時間の半分になるよう設定しておく。こうして，ヘクトールが目標地点に近づくにつれて，コンピュータは猛烈な勢いで演算を加速して行き，

目標地点の直前で演算速度は無限大となる。今回，ヘクトールはアルゴリズム-Zに従うことを免除されているため，彼は難無く目標地点に到達する。

さて，ヘクトールが目標地点を走り抜けた後，問題のコンピュータはどのような状態にあるのだろうか。演算を続けているのか，それとも停止しているのか。演算を続けていることはありえない。なぜなら，既にヘクトールはアルゴリズム-Zが適用される領域を通過してしまっているのだから。一方，コンピュータが停止していることもあり得ない。なぜなら，ヘクトールが目標地点に達する以前，コンピュータは無限ループに陥っていたのであり，それは決して『停止』のステップへは進めないはずだから。いずれにしても矛盾に陥る。

しかも，先ほどの君の議論によれば，ヘクトールは点gに達したと同時に点gを除く半開区間［s, g）の走破をも完了したことになるが，しかし，コンピュータの方は停止のステップへ進むことができず，したがってアルゴリズム-Zの有効範囲である［s, g）においてさえ演算を完了していないのだ。両者の間に齟齬が生じている。

このコンピュータが行っていた作業は，アルゴリズム-Zに従っていない走者の走りを，アルゴリズム-Zの観点から記述する作業だったと考えてよかろう。だとすれば，運動は，或る作業の連鎖として記述された場合には矛盾と齟齬を生じるのであり，その意味で非合理なものだと言えるのではないか。」[13)]

無限の作業・演算における上界の欠如

Z氏が最初に述べた「いかなる作業も，相互に独立した各ステップから成る作業である限り，『すべての作業が完了した状態』は，必ず『最後の作業が終った状態』として記述されねばならない」という主張は，基本的には正しいように思われる。実際，我々が行う一連の作業（operation）が「最後のステップ」に達することなしに「完了する」という事態を想像することは困難である。これはおそらく，空間的移動が，そのいかなる部分も連続的で無限に分割可能なアナログ的変移であるのに対し，作業・演算（operation）の方は，各ステップが分割できないようにユニット化された，いわばデジタルな（離散的で数列を成す）手続きの連鎖であることと関係しているように思われる。もしそうだとすれば，アルゴリズム-Zの観点からの運動の記述のように，最後のステップが存在しない無限の作業においては，それらが「完了する」ということもあり得ないことになる。

さて，一連の作業における「最後の作業」は，それらの作業から成る順序集合の「最大元」として解釈できる。したがってこの問題は，「最大元が存在しないような作業の順序集合においても，終わりのない無限の過程を『完了する』という事態が成り立ち得るか否か」という問いとして定式化できる。最大元が存在しない区間の運動では，走者がその区間の上界に到達することに

より，終わりのない運動過程の完了が定義された。だから，最大元が存在しない作業においても，その集合の上界に到達できるなら，終わりのない作業過程の完了を定義できるだろう。

ここで注意すべきことは，「上界」は或る順序集合とこれを部分集合として含むような順序集合との関係の中で規定される概念であり，したがって，或る順序集合に上界が存在するためには，その集合を部分集合として含むような順序集合が存在しなければならない，ということである。半開区間［s, g）に属する点の順序集合Pの場合，これを部分集合として含む集合Rが存在した。だからこそ，集合Pには上界が存在し，走者はそこ（最小上界としての点g）に到達できた。これとは逆に，もし最大元が存在しないような順序集合Xに，これを部分集合として含む順序集合が存在しない場合には，Xの上界は存在しない。そしてこの場合，最大元も上界も存在しない以上，そのいずれかに到達してその過程を完了することは不可能なのである。

このことから，Z氏の思考実験で指摘された，運動とその記述作業との間の齟齬について説明できる。数直線上の半開区間［s, g）に含まれる点の集合Pも，アルゴリズム-Zの観点から運動を記述する際に現れる無限の演算の集合Oも，どちらも順序集合と見なすことができ，また終わり(最大元)の無い無限集合である点も共通である。しかし，両者の間には，次のような相違がある。集合Pは，数直線上のすべての点の集合Rの部分集合であり，集合Pには集合Rにおける上界が存在する。ところが，演算の集合Oにはこれを部分集合として含むような集合が存在しない。このため，半開区間［s, g）における運動がアルゴリズム-Zに基づく演算によって記述された場合，この演算の集合Oには上界が存在せず，したがって，上界に到達することによって演算の「完了」を定義することができないのだ[14]。

これを日常語で言い換えれば，次のようになる――「終わりのない無限」の過程を「完了する」ためには，ちょうど走者が［s, g）の外部の点gに達したように，終わりのない無限の領域の外に到達できるのでなければならない。しかし，演算においては，空間的移動の場合とは異なり，終わりのない無限の演算の領域の外にそれを超えて続く当の演算が存在するわけではない。したがって，そのような演算に到達して無限の演算が「完了する」ことはあり得ない。

さらに，Z氏の思考実験において，コンピュータが矛盾に陥った原因については，こう説明される。実は，アルゴリズム-Zに従っていない運動の記述のために当のアルゴリズムを用いる場合にも，その実行者の存在可能範囲が生じるのである。それはちょうどアルゴリズム-Zに従って走った際のヘクトールが，集合Pの上界としての点gには存在できず，その結果，終わりのない無限の過程の完了を認められなかったのと同様であって，目標地点に向かって走る走者を記述するコンピュータもまた，走者が点gに達する時刻とその後の時間帯には，アルゴリズム-Zに基づいたプログラムを実行しつつあるものとしては存在できない。もしその時間帯にそのようなプログラムを働かせていたとしたら，コンピュータは何らかの異常を来しているは

ずである。なぜなら，それはその時間帯には実行不可能なプログラムを，敢えて実行しようとしているのだから。コンピュータが異常に陥るのを防ぐには，走者がゴールに到達する時刻ちょうどに電源を切るか，あるいはその時刻ちょうどに問題のプログラムの実行を解除しなければならない。この瞬間から，プログラム-Zの実行者は存在しなくなる。だから，このコンピュータは無限の演算を実現したにもかかわらず，それを完了しなかったのである。

７．派生型パラドクスおよび第二の派生型（時間と演算のパラドクス）

派生型パラドクスの解決

さて，ようやくここで，アリストテレスが『自然学』第８巻において言及した，第一パラドクスの派生型について論じることができる。Ｚ氏の思考実験で用いたコンピュータのプログラムを修正して，残った距離の1/2の値を算出する代わりに，初期値としての０に順次１を加えていくような演算を行うと仮定しよう。他の条件は先ほどと同一である。コンピュータは，ヘクトールが各中間地点に達する度に，直前の演算で得られた数値に１を加算する。この作業は，派生型パラドクスにおいて仮定した作業，即ち，走者が各中間地点に達する度に一つずつ数を数えて行く作業と同一のものである。では，このコンピュータは，派生型パラドクスにおいて主張されたように，走者がゴール地点に到達した時，終わりのない無限の数を数え終えているのだろうか。もちろん，答は否である。人間もコンピュータも，仮に無限の速度で演算を実行できたとしても，そのような作業を「完了する」ことはできない。なぜなら，それらの演算の無限集合には上界が存在しないからである。我々が，「終わりのない無限の過程を完了した」と言えるためには，その集合の上界に達する必要があった。したがって，この議論からは「終わりのない無限の数を数え終える」という矛盾は生じない。

時間と演算のパラドクス

ところで，アリストテレスは派生型パラドクスについて述べた箇所（263a6-11）のすぐ後で，彼が『自然学』第６巻で示した解決法の不十分さを認め，次のように述べている。

> さて，運動に関する最初の議論において，我々はこの問題を，時間はそれ自身の中に無限なものどもを持っているということによって解決した。……（中略）……しかし，この解決法は，質問する者に対しては十分であるが（というのは，彼は，有限な時間において無限なものどもを通過できるか，あるいは，無限なものどもを数えることができるかどうかと問うからである），事柄と真理に対しては十分でない。なぜなら，<u>もし人が，距離［を考慮すること］から離れ，有限な時間において無限な距離を通過することは可能かと問う</u>

ことから離れて，時間そのものについてこうした問いをたてるなら（というのは時間は無限の分割点を持つから），あの解決法はもはや十分ではなくなるだろう………。(263a12-22)

アリストテレスがここで示唆している問題はおそらく，次のようなものであろう。上で述べたコンピュータが，走者の走っていない状態で，一定時間の半分が経過する度ごとに 1 を加えて行く演算を実行すると仮定する。この場合，コンピュータはもはや走者の運動を記述してるわけではないが，にもかかわらず，その時間の終了時刻には終わりのない無限の数を数え終えていることになる[15)]。つまり，数えるという作業を運動から切り離しても，先の派生型パラドクスと同じ矛盾に陥るのである。

ここでアリストテレスが，彼の最初の解決法では不十分だと考えた理由は，その解決法が，無限の空間と無限の時間とを一対一に対応させることに基づいていたからである。ところが，この新たな派生型パラドクスは，数える操作と時間だけから成り立っており，空間は一切登場しない。だから，彼の最初の解決法によってこのパラドクスを解くことは不可能なのである。

もちろん，このパラドクスもこれまでと同じ仕方で解くことができる。だが，この議論はもはや運動に関するパラドクスではなくなっており，時間と演算に関するパラドクスへと変化している。この事実は次のことを示唆していると思われる。

（α）これらのパラドクスにとって共通の核となっているのは，本来，運動にも時間にも直接関わりのない，無限ループで表現されるような或る種の循環的作業である。

（β）「二分割」と「アキレウス」および「派生型」では，（α）の作業を運動記述に適用することでパラドクスが生じたが，他方，「第二の派生型」では，（α）の作業を時間記述に適用することでパラドクスが生じた。

まず先に，（β）について述べておこう。なぜ（α）の作業が運動や時間に対して適用されると，パラドクスが生じるのだろうか。それは，先に指摘したように，（α）の作業には一定の適用範囲があるからである。静的な対象に適用される場合には，（α）はその適用範囲を超えて使用されることはない。しかし，（α）を或る運動を記述するために使用する場合，当の運動は（α）の作業によって生み出されるわけではないから，運動体は自らの推進力によって（α）で記述できる範囲から抜け出てしまう。同様に，時間は記述の仕方にはおかまいなしに経過するため，この場合にも（α）の適用範囲からの逸脱が起こる。このことにより記述方法と記述対象との間に齟齬が生じ，その結果，本来，運動にも時間にも直接関係のない（α）の作業がパラドクスへと転化するのである。

次に（α）について，さらに具体的に規定してみたい。先ほど（α）について，「無限ループで表現されるような或る種の循環的作業」だと述べたが，これは言い換えれば，（α-1）「或る作業の結果に対して再び同一の作業が適用されるような，或る種の再帰的作業」のことだと

言える。しかし，（α）の作業は，単なる「再帰的作業であること」以上の条件を必要とする。なぜなら，或る作業が再帰的作業であるとしても，（或る数に再帰的に 1 を掛ける場合のように）その作業の結果，同じ値が繰り返されるだけであったり，数値が限りなく増大するだけでは，この種のパラドクスは生じないからである。それらのパラドクスの焦点は，運動体が目標に限りなく近づきながらも決してそれに到達できないことである。したがって，或る再帰的作業がこの種のパラドクスを生じさせるためには，（α-2）「(i) 再帰的作業によって生じる結果が任意の比率で限りなく縮小していくか，あるいは，(ii) 再帰的作業の結果が，任意の比率で限りなく縮小していく他の値と関係づけられるか」でなければばならない。このうち (i) は「二分割」と「アキレウス」の場合であり，(ii) は二つの派生型パラドクスの場合である。

ところで，このような再帰的操作（recursive operation）は，数学において最も純粋な姿で現れる。その意味で，再帰的操作は本質的に数学的性格を持つのである。したがって次節では，これらのパラドクスにおける特殊な再帰性と数学との関係について考えてみることにしたい。

８．第一・第二パラドクスの数学的背景

再帰的定義によるパラドクスの表現

二つのパラドクスの核となる再帰的操作は複数の数学的形式で表現することができる。再帰的操作のうち最も典型的なものの一つは，再帰的定義の形式を持つものであろう。実際，第一・第二パラドクスを再帰的定義を用いて表現することができる。そして再帰的定義を用いた以下のような定式化の（２）の段階で，無限再帰が現れる。

第一議論

スタート地点と目標地点との距離をsとした場合の「ヘクトール数」を次のように再帰的に定義する。

（１） $s=(1/2)^0 s$ はヘクトール数である。

（２）もし $(1/2)^n s$ がヘクトール数なら，$(1/2)^{n+1} s$ もヘクトール数である。

（３）これ以外の数はヘクトール数ではない。

この再帰的定義と次の (4) (5) から，(6) が示される。

（４）ヘクトールと目標地点との距離は，或るヘクトール数で表されるか，または二つのヘクトール数の間の或る数で表される。

（５） 0 はヘクトール数ではなく，また二つのヘクトール数の間にもない。

（６）ヘクトールは目標地点に到達できない。

第二議論

スタート時のアキレウスと亀との距離をsとした場合の「アキレウス数」を次のように再帰的に定義する。（ここでは，亀とアキレウスとの速度の比を$T:A$とする。）

（1） $s=(T/A)^0 s$ はアキレウス数である。

（2） もし$(T/A)^n s$がアキレウス数なら，$(T/A)^{n+1} s$ もアキレウス数である。

（3） これ以外の数はアキレウス数ではない。

この再帰的定義と次の（4）（5）から，（6）が示される。

（4） アキレウスと亀との距離は，或るアキレウス数で表されるか，または二つのアキレウス数の間の或る数で表される。

（5） 0はアキレウス数ではなく，また二つのアキレウス数の間にもない。

（6） アキレウスは亀に追いつけない。

以上，ゼノンの二つのパラドクスにおける再帰的操作の過程を，再帰的定義の形式で表現してみたが，それらのパラドクスにとってより自然な数学的定式化は，それらの過程を無限等比数列の形で表現するものであろう。そこで次に，この観点からパラドクスを分析する。

無限等比数列の形式に基づくパラドクスの分析

第一・第二パラドクスにおける運動体のそれぞれの位置が無限等比数列を形成することには既に度々触れてきた。そして，無限等比数列は，或る種の再帰的操作によって生ずる。第二パラドクスにおいて，各回のアキレウスと亀の移動距離，および両者間の距離を数式で表せば，次の表のようになる。（スタート時点での両者間の距離をa，アキレウスに対する亀の速度の比をrで表す。なお，ヴラストス前掲論文（1966）の appendix にも同様の表がある。）

作業の回	0	1	2	3	4	…
アキレウス	0	a	ar	ar^2	ar^3	…
亀	0	ar	ar^2	ar^3	ar^4	…
両者間の距離	a	ar	ar^2	ar^3	ar^4	…

この表において第1回以降のいずれの回についても，両者間の距離はその回に亀が進んだ距離と一致する。したがって，仮に作業回数を限りなく増加させても，亀の移動距離が決して0にならない以上，両者間の距離も0にならない。このことは，この作業を無限回繰り返したとしてもアキレウスは亀に追いつけないことを意味する。しかし，両者間の距離が0に収束する（限りなく0に近づく）こともまた真である。そこで，これらの事実をめぐって次のようないくつかの問いと答を想定することができる（以下の分析は，あくまでも問題の本質的連関を示すものであって，歴史的経緯を述べたものではない）。

次の (A)～(D) において，問題の核になっているのは (A) の数学的事実である。そこから，問い (B) が生じ，さらに (B) が運動過程の中へ投影されて (C) の形を取った場合，(D) の問いをめぐるパラドクスへと転化する可能性が生まれる。

(A) $|r|<1$ の無限等比数列は，極限値 0 に収束する。［rは無限等比数列の公比］

(B) $|r|<1$ の無限等比数列のいずれかの項は，極限値 0 と一致するか？

［肯定］一致する。………偽

［否定］一致しない。……**真**

(C) ヘクトールと目標地点との距離，またはアキレウスと亀との距離をアルゴリズム-Z の観点から記述した場合に生ずる無限等比数列のいずれかの項は，極限値 0 と一致するか？

［肯定］一致する。………偽

［否定］一致しない。……**真**（ゼノンの立場）

(D) ヘクトールは目標地点に到達できるか？アキレウスは亀に追いつけるか？

［肯定］ できる。 ………**真**

［否定］ できない。 ……偽（ゼノンの立場）

(D) では，真・偽が (C) の場合とは逆転している。それは，(C) と (D) が全く異なる問いだからである。ところが，ゼノンと同様，ゼノンの反対者も (C) と (D) を同一の問いだと見なすので，多くの人は (D) の肯定を擁護するために，(C) も肯定すべきだと考える。ところが，(C) では否定の方が正しいから，人は，ゼノンが (D) を否定する際に論拠にした (C) の否定を，論駁することができない。その結果，矛盾すると思っている (C) の否定と (D) の肯定とが，両立してしまう。これこそ，我々の思考がパラドクスに陥った状態なのである。

このような問いの取り違いが生じるのは，無限等比数列を形成するアルゴリズムに，適用範囲の限界があることを自覚しないからである。(B) (C) の問いが当のアルゴリズムの適用範囲内での問いであるのに対し，(D) の問いは本来そのようなアルゴリズムとは関わりのない問いであり，そのため (D) の問いはそのアルゴリズムの適用範囲を超えている。だから，ゼノンのように (C) の否定を論拠にして (D) の否定を導くことはできないし，それとは逆に，(D) の肯定を論拠にして (C) の肯定を導くこともできない。ところが，我々は，しばしばそのような誤謬推理を行ってしまうのだ。

さらに問題の作業規則に関して以下のように考えるなら，第一・第二パラドクスと二つの派生型パラドクスは全く同じ問題を二通りの仕方で表現したものであることが理解されるだろう。「二分割」における無限等比数列の各項の集合を，自然数を定義域とする関数 $f(n)=(1/2)^n$ の値域と見なすことができる。$(1/2)^n$は演算における操作規則を示し，我々はそのような演算で得た値を連続体（空間・時間）上に位置づける。「二分割」と「アキレウス」はこのような作業を値域（等比数列）の側から記述する際に生じ，二つの派生型パラドクスはその同じ作業を

定義域（自然数）の側から記述する際に生じる。そして，関数 $f(n) = (1/2)^n$ は問題の作業手続きを表現しており，その意味で，それは当の作業のアルゴリズムを示すものなのである[16)]。

幾何学および実数に関する操作規則とゼノンのパラドクス

以上，ゼノンの二つのパラドクスについて，無限等比数列の観点から分析した。しかし，それらのパラドクスを生み出す母胎となっているのは，上に示した数列や関数それ自体はなくて，むしろそれらを可能にしている数学的条件の方だと考えるべきである。二つのパラドクスを無限等比数列や再帰的定義の形式で表現できるとしても，それらはあくまでも或る数学的条件を背景として浮かび上がる図なのである。その条件とは，先に述べた（α-2）の（i）「再帰的操作によって生じる結果が任意の比率で限りなく縮小していくこと」を可能にするような数学的枠組に他ならない［これ以降，（α-2）でその（i）のみを表す］。

物理的世界における空間・時間・運動・物体は一般に連続体と見なされ，それらは（α-2）の条件を満たしているように見える。しかし実は，そのような物理的連続体が（α-2）の条件を完全な仕方で満たすことは，実証されているわけではない。とはいえ，それが反証されているわけでもないし，仮にそのような操作を繰り返すうちにいずれかの段階で（α-2）が成り立たなくなると仮定しても，少なくとも日常的には，それがどの段階で無効になるかを我々は知らないのである。我々が物理的連続体に対して認めているのは，（α-2）ではなくて，むしろ（α-3）「或る範囲において，任意の比率による分割・縮小を結果するような再帰的操作が可能である（但しそのような操作を限りなく適用できるか否かは問わない）」の方であろう。物理的世界においては，或る物理法則によって，（α-2）の適用範囲に何らかの制限が加えられる可能性は常に残されているのである。だから，この点を論拠にしてゼノンのパラドクスを退けようとする議論も生じて来る[17)]。確かに，物理的連続体と数学的連続体を区別すること自体は，重要な論点である。しかし既に見たように，それらのパラドクスにおける矛盾は，数学的レベルの内部で，操作手続きとその適用範囲との間に生じているのだから，「無限分割は物理的には不可能だ」と言ってゼノンに反論することは，結果的に，パラドクスの真の原因から目をそらすことにつながるのである。

空間に関する（α-3）のような操作は，幾何学においても古くから認められてきた。しかも，幾何学では，物理的空間を扱う場合と異なり，（α-3）を認めることが（α-2）の無限再帰を認めることに直結する。というのは，幾何学においては，抽象化された規則以外の物理的要素が捨象されるため，あらかじめ制限を設けておくのでない限り，物理法則の発見が原因となって（α-3）から（α-2）が帰結しなくなる，ということはあり得ないからである。幾何学における（α-3）の再帰的過程は何ものにも妨げられず無限に続くことになる。ユークリッド『原論』において図形の大きさが特定の数値で表されないという事実も[18)]，このことと関係するように

思われる。つまり，図形に関する定理は，そこで問題にされる関係性さえ満たせば任意の大きさについて普遍的に成り立つこと（即ち，それぞれの図形を好きなだけ［限りなく］拡大または縮小したとしても同一の証明手続きにより同一の結論が導かれること）が暗黙のうちに認められているのである。そして，ゼノンの第一・第二パラドクスは運動・空間・時間といった連続体を幾何学的に扱う議論であり，彼はパラドクス中でこの幾何学的原則を最大限に利用しているのである。

一方，我々は，連続体としての物理的対象を幾何学的に扱うだけでなく，太古の時代からそれらを数えてきた。自然数は本来，まず単位 1 を定め，そこから後続者を再帰的に定義して得られる離散量であり，本質的に，連続体とは性格を異にする。だが，連続体を数として扱おうとするなら，連続体に任意の操作を加えた結果もまた数として扱えるのでなければならない（もしそうでなかったら数は十全な仕方で世界を記述できないことになる)。そして，無理量を含む連続体のどのような大きさも，またそれらに対するどのような操作の結果も，数として表現可能だと見なすなら，数もまた必然的に，幾何学で認められている（α-2）を受け入れるのでなければならない。このことは，自然数から始まった数の概念が，まず稠密性を持った有理数に拡張され，さらに解析学の発達に伴って，完備性を備えた実数体へ拡張される過程を通じて実現された[19]。これにより，我々はより大きいスケールで成り立っているのと同一の関係性を，任意のより小さいスケールの中へ限りなく縮小しながら再現して行く操作の，数的根拠を獲得したことになる。20ページの図 3 はデーデキントの「切断 (Schnitt)」による実数の定義を連想させるが，それは決して偶然ではない。なぜなら，図 3 は或る無限等比数列の収束によってその極限となる実数 g が定まることを示しており，それはカントールの，有理コーシー列の収束による実数の定義に対応するものだからである。いわば，図 3 はカントール的手続きによって実現されるデーデキント的切断を示す図であり，そのことを通じて実数 g を規定しているのである[20]。

以上述べたように，ゼノンの二つのパラドクスを，純粋に数学的な形式で表現できる理由は，我々が，物理的連続体に関する操作方法を抽象し，それを幾何学および実数に関する操作規則として無条件的に使用しているからである。第一・第二パラドクスの核心にあるのは，この抽象化された一般的操作規則を背景（地）として成立する，特殊な作業手続き（図）の問題であり，この意味において，それは数学的アルゴリズムの問題なのである[21]。

［**付記**：小論の主要部分は，2006年 7 月 8 日開催の東京都立大学哲学会第30回研究発表大会で発表された。当日，会場で熱心に聴いてくださった方々，事前に発表原稿を読んで頂き貴重なコメントを寄せてくださった方々，そして，論文として仕上げる際，いくつかの表記上の問題を指摘してくださった富山大学理学部の東川和夫教授に心からの感謝を捧げる次第である。］

注

1）アルゴリズムとプログラムとの違いは，プログラムが特定のプログラミング言語によって記述されるのに対し，アルゴリズムは通常，プログラミング言語によらず，日常言語やフローチャートなど，一般的な仕方で記述されることである。アルゴリズムがいずれかのプログラミング言語によって記述されれば，それはプログラムとなり，コンピュータ上で実行可能になる。

2）シンプリキオス，ピロポノス，E. ツェラー，J. バーネット，B. ラッセル(1903)，W. D. ロス，カーク＆レイヴン等が無限後退型解釈を採っている（なお，Kirk, Raven & Schofield［2ed.］はどちらの解釈を採るか明言していない)。

Simplicii in Aristotelis Physicorum liberos quattuor posteriores commentaria (*Commentaria in Aristotelem Graeca*, vol. X, Berlin, 1895), 1013.7-12.

Ioannis Philoponii in Aristotelis Physicorum liberos tres priores commentaria (*Commentaria in Aristotelem Graeca*, vol. XVI, Berlin, 1887), 81.8-12.

E. Zeller, *Die Philosophie der Griechen in ihrer Geschichtlichen Entwicklung*, erster Teil erste Abteilung (1844；6. Auflage, Leipzig, 1919), S.756.

J. Burnet, *Early Greek Philosophy* (1892；4th ed. London, 1930), p.318.

B. Russell, *The Principles of Mathematics* (1903；2nd ed. London,1937), p.348.

W.D. Ross, *Aristotle's Physics, A revised Text with Introduction and Commentary* (Oxford, 1936), pp.658-659.

G.S. Kirk＆J.E. Raven, *The Presocratic Philosophers* (Cambrdge, 1957), p.293.

3）G. ヴラストス，J. バーンズ，山川偉也，P. S. ハスパーはアリストテレスに基づいて無限前進型解釈を採る。また，R.M. セインズブリーも無限前進型解釈によって議論を展開しているが，彼はこの解釈を採る理由について何も説明していない。なお，ラッセルは以下の著作（1914）において，無限後退型に基づくバーネットの解説を引用しているにもかかわらず，それに続く彼自身の議論では，特に説明もないまま無限前進型に基づく反論を展開している。

B. Russell, *Our Knowledge of External World as a Field of Scientific Method in Philosophy* (London, 1914; revised ed. 1926)，pp.175-178（1993年版）［石本新 訳『外部世界はいかにして知られうるか』(『世界の名著58』, 中央公論社, 1971), p. 242-243］.

G. Vlastos,'Zeno's Race Course'，*Journal of Hellenic Studies* 4 (1966), pp. 95-108.

J. Barnes, *The Presocratic Philosophers,* revised ed. (London, 1982), p.262.

R.M. Sainsbury, *Paradoxes* (Cambridge, 1988)［一ノ瀬正樹訳『パラドクスの哲学』(勁草書房, 1993), pp.18-36］.

山川偉也『ゼノン４つの逆理－アキレスはなぜ亀に追いつけないか－』（講談社, 1996), pp.88-90.

P.S. Hasper,'Zeno Unlimited', *Oxford Studies in Ancient Philosophy* XXX (2006), pp.49-85.

4）初めに引用したアリストテレスの報告において,「有限な時間」を暗示している可能性があるのは,「アキレウス」の報告の中に見られるοὐδέποτε（いつになっても決して…ない）という一語だけである。アリストテレスは，この言い回しが「目標地点に到達するには無限の時間が必要である」ことを含意していると判断し，ここから，二つのパラドクスは「無限の距離」と「有限の時間」との誤った対比によって生み出された，と考えたのかも知れない。確かに『自然学』第６巻第２章（233a21-31）および第８巻第８章（263a11-17）で，アリストテレスは第一パラドクスを「有限の時間において」という条件に基づく議論だと見なしているが，それはむしろアリストテレス自身の解釈から引き出された条件だったように見える。

5）ε - δ 論法（数列の場合にはδを用いないので ε -*n* 論法と呼ぶ方が正確だが）によって厳密に述べたとしてもこの点に関しては全く変わりがない。

6）以上の議論は，ゼノンが，「すべての中間地点を通過することは目標地点に到達するための必要十分条件だ」と考えていたと仮定した場合の話である。しかし，後に検討にするように，別の可能性もある。

ゼノンは，それらを目標地点に達するための必要条件と考えていたかもしれない。その場合，無限の分割点の中に目標地点が含まれていないことは問題ではなくなり，パラドクスの焦点は，「目標地点に達する前に終わりのない無限の地点への到達を終えることができるか」という問題へと変化する。そして『自然学』第6巻でのアリストテレスの議論は，この問いへの明確な答を用意していないように思われる。その意味で，ゼノンが提示した手順を必要条件と解釈した場合にも，やはりこの解決法は不十分なのである。

7）小論では，紙幅の関係で，アリストテレスによる第二の解決法は扱わない。ただ，次の点だけは指摘しておく。彼の第二の解決法は，無限に関して可能態と現実態を区別し，前者の存在のみを認め，後者を否定するという方針に基づいている。無限に関するこの方針自体は必ずしも間違いとは言えないと思うが，少なくとも第一・第二パラドクスの解決法としては不適切である。なぜなら，そのように，現実態としての無限分割を否定することによって，目標への到達不可能性を退けるなら，当のパラドクスが論理的・数学的理由から生じたのか，それとも，物理的あるいはその他の理由から生じたのかを判定できなくなってしまうからである。パラドクスの由来にそのような違いがあったとしても，この解決法ではどれも一律に排除されてしまう。真の解決法は，そのパラドクスが何に由来するのかを正確に見極められるものでなければならない。

8）デカルトは，無限等比級数の和の公式を使っているわけではないが，実質的にはこの解決法を採用している。おそらくそれは，この解決法を用いた最初期の例の一つであろう。

Correspondance Descartes à Clerselier, *Œuvres de Descartes* IV (publées per C. Adam & P. Tannery, Paris, 1901［1972］), pp.442-447.

デカルトによる議論は，およそ次のようなものである。線分ABにおいてAの側から全体の1/10に当たる部分ACを点取り，一方，Bの側からは全体の8/10に当たる部分BDを取る。両方の間にABの1/10の部分が残るが，これについてもA側からAB全体の1/100の部分CEを取り，B側から8/100の部分DFを取ってそれぞれ最初に取った部分に付け加える。さらにそれらの間に残る1/100の部分も同様の比率で分割・加算し，この作業を無限に続けていく。すると最後には，或る点Gを境に，A側に取られた諸部分とB側に取られた諸部分へと，AB全体が分かれる。そしてAG：BGの比は1：8になる。なぜなら，それぞれの回に取られた各部分の比がいずれも1：8だったからである。したがって，1/10＋1/100＋1/1000＋……の和は，AB全体の1/9という有限の値にしかならない。［だから，アキレウスが亀に追いつくために走る距離やそのためにかかる時間もまた，有限の値にしかならない。］

B.ラッセルも，前掲 *Our Knowledge of External World*（『外部世界はいかにして知られうるか』）において，この解決法を用い，アキレウスは有限の時間内に亀に追いつくと論じている（pp.175-178［1993年版］，邦訳pp.242-244)。（ちなみにラッセルは，1900年から1901年にかけて執筆した著作と論文［前掲 *The Priciples of Mathematics*, p.350および 'Mathematics and the Metaphysicians', in *Mysticism and Logic* (London, 1917) pp.59-74］において，無限集合では部分の濃度と全体の濃度が等しいことを論拠とする，別の解決法を用いていた。ラッセルはそれらの中で，パラドクスの論旨を「亀の位置とアキレウスの位置はすべて一対一に対応するから，亀の移動距離がアキレウスの移動距離の部分となることは不可能だ．だからアキレウスは亀に追いつけない」という意味に解釈し，論点を彼の解決法にとって都合の良い形へと改変した上でそれを解決したと主張しているのである。だが，これによってゼノンのパラドクスが解決されたなどとは言えないであろう［*cf.* W.D.ロス，前掲書p.75]。）

A.ホワイトヘッドとW.V.クワインも，事実上この解決法に基づいて，アキレウスが亀に追いつくのに要する時間は有限になることを指摘する。

A.N. Whitehead, *Process and Reality* (New York, 1929; corrected edition 1978), p.69 (1978年版).

W.V. Quine, 'The Ways of Paradox', in *The Ways of Paradox and Other Essays* (Cambridge, Mass., 1966；2nd ed.1976), pp.3-4, 9.

また，ヴラストス（前掲論文）も，ε-δ論法で説明するものの，実質的にはこの解決法によっている。

9）この問題は，循環小数の問題，さらに言えば，実数の無限小数展開の問題と関わりがある。この点に

関しては,既に複数の論者によって指摘されている。例えば,野崎昭弘『逆説論理学』(中央公論社,1980)は,これから述べるものと同じ例を挙げて,循環小数の極限値の問題とゼノンのパラドクスとの関連性を指摘している(pp.116-117)。以下においては,同書で挙げられている例を借りながら,より小論の論旨に適合させた形でこの問題について論じてみたい。

数学ではしばしば,次のような表記法が用いられる。

$$1 = 0.99999\cdots$$

これは,正式には,0.9+0.09+0.009+0.0009+0.00009+… という無限等比級数(初項0.9,公比1/10)が1に収束すること,即ち,この無限等比級数の極限値が1であることを意味している。(とすれば,上の式における記号「=」の用法は,2+3=5の場合のような通常の用法とは異なっていることになろう。通常の「=」は,左辺の値と右辺の値がそれ自体として等しいことを意味するが,上の式の「=」は右辺によって表記されるような無限級数の極限値が左辺の値と等しいことを意味するからである。)

これに対し,次のような反論があるかもし…れない。

$$1/3 = 0.33333\cdots$$

という式は一般に当然のこととして認められているが,この式の左辺と右辺を共に3倍すると,それは最初の式と一致する。したがって,最初の式もまた,収束や極限値などの概念によって媒介されることなしに認めてよいはずだ,云々。しかし,実はこの第二の式の右辺もまた,無限等比級数の極限値を表すと考えるべきなのである。というのは,10進法によって1を3で割り,或る桁までの小数を求めれば,必ず「余り」が生ずる。我々はその余りをさらに次々と3で割って行くが,それぞれの余りは,0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, …という無限数列を形成し,余り自体は決して無くなることがない。ところが,この「余り」は上の第二の式では完全に無視されている。そこで,もしもこの論者の主張するように,循環小数は極限値を表さないと考え(仮にそのうよな表記法を採用して),第二の式の両辺を3倍し,無限小の余りも含めて,「=」で結ぶなら,

$$\begin{aligned} 1/3 \times 3 &= 0.33333\cdots \times 3 + \text{(無限小の余り)} \\ &= 0.99999\cdots \quad + \text{(無限小の余り)} \end{aligned}$$

と表記しなければならないはずである。これでは第一・第二の式と全く異なった式になってしまう。したがって,我々が第二の式を正しい式として用いることができるのは,その右辺が当の数値自体を表しているのではなく,間接的仕方で無限級数の極限値を表しているからなのである。

10) 本文で示した第二議論のアルゴリズム(アルゴリズム-Z_2)は,アキレウスの観点からの作業のアルゴリズムである。しかし,我々がその過程を思考の中でシミュレートする場合には,アキレウスと亀との距離を我々自身の計算で割り出す必要があるため,そのアルゴリズムは本文で挙げたものとは異なったものになる。次にそれを示す。(ここでは先ほどの数値を変え,アキレウスと亀との距離を1/2,両者の速度の比を1/2とする。)

第二議論(アルゴリズム-Z_2')

Step1　亀との距離(x)を1/2,亀とアキレウスの速度の比(r)を1/2とせよ。

Step2　直前のStepのxの値だけアキレウスを前進させよ。

Step3　二つ前のStepのxの値にrを掛けて新たなxの値を求めよ。

Step4　x=0なら作業を停止し,x>0ならStep2に戻れ。

当然,上のアルゴリズムでも,Step2 ~ Step4の間で無限ループが形成される。

11) 第一パラドクスにおいてこれが特に解決の難しい問題であることを最初に指摘したのは,W.D.ロス(前掲書p.74)かもしれない。また,藤沢令夫とヴラストス(前掲論文)もこの問題をパラドクスの核心として捉える点で共通している。

藤澤令夫,「運動と実在 ── ゼノンの運動論駁をめぐって ── 」,『哲学』第15号,(日本哲学会編,1965)[『藤澤令夫著作集Ⅰ』(岩波書店,2000)所収,pp.387-411]

12) 順序集合の「上界」を,これと関連する「最小上界(上限)」「最大元」と共に説明すると,以下のようになる。

【最大元（maximum)】順序集合Aに一つの元aがあり，Aのいかなる元xに対しても$x \leqq a$が成り立つとき，aをAの最大元（maximum)という。

【上界（upper bound)】Mを順序集合Aの空でない部分集合とすると，bがAの一つの元で，Mのすべての元xに対して$x \leqq b$が成り立つとき，bをMのAにおける上界（upper bound）という。

【最小上界（least upper bound)】順序集合Aの空でない部分集合Mに上界が存在し，その上界の集合Uには最小元が存在するとき，それをMのAにおける最小上界（least upper bound）または上限（supremum)という。

13）Z氏が発言の後半で取り上げた，コンピュータを用いた思考実験は，M.ブラックおよびJ.トムソンの無限機械による思考実験の，より徹底したバージョンである。

M. Black, 'Achilles and the Tortoise', *Analysis* XI (1950-51), pp.91-101.

J. Thomson, 'Tasks and Super-Tasks', *Analysis* XV (1954-55), pp.1-13.

このうち，トムソンの議論は特に重要であり，小論の論点のいくつかを先取りしている。例えば，無限個の中間地点から成る集合Zの中に目標地点は含まれないこと，走者がすべてのZ点を通過したと仮定した場合，その走りを完了する時には彼が存在する場所がなくなること，などである。（トムソンの上記論文については，前半の「トムソンのランプ」の思考実験が有名であるが，重要な論点はむしろ論文の後半に現れている。）しかし，トムソンは次のP.ベナセラフからの批判を受けて，論点のいくつかを後退させてしまった。

P. Benacerraf, 'Tasks, Super-Tasks and the Modern Eleatics', *Jounal of Philosophy* LIX (1962), pp.765-784.

J. Thomson, 'Comments on Professor Benacerraf's Paper', 1970.

以上四篇の論文は，いずれも次の論文集に収められている。

W.C. Salmon［ed.], *Zeno's Paradoxes* (Indianapolis, 1970; 2nd ed. 2001).

ランプの思考実験に関わる難点はともかく，トムソンが彼の基本的な論点についてベナセラフに対し十分な反論をできなかった理由は，おそらく彼にはゼノンのパラドクスを作業手続きの問題として捉える視点がまだ希薄であって，その結果，当の作業手続きが持つ有効範囲と実際の走りとの関係を捉えきれなかったことによるように思われる。また，ブラックとトムソンの論文では直接「二分割」のパラドクスが扱われているわけではなく（これは当時，「二分割」に関しては無限後退型解釈が支配的だったことによる)，それらは本来「アキレウス」における無限作業をめぐる議論であったことに注意すべきである。なお，後にR.M.セインズブリー（前掲書）がそれらの議論を「二分割」の問題に転用している。

14）この点に関し，次のような反論も予想される。Z氏の思考実験において，ヘクトールが点gに達した時刻以降にさらに新たな演算を行うようなプログラムを，問題のコンピュータに組み込むことにする。その場合，［s, g］における無限個の演算を超限順序数ωで表せば，点g到達以降にも，ω+1, ω+2, ω+3, ω+4, ω+5, ……という順序数の演算が続くことになる。その結果，［s, g］での演算の集合に上界が存在することになる。こうすれば，「［s, g］における無限の演算が完了した」と言うことができるのではないか。

しかし，仮にヘクトールが点gに達した後にコンピュータに新たな演算を実行させる場合でも，点gに達する瞬間にアルゴリズム-Zに基づくプログラムを一旦解除しなければならないはずである。その場合，［s, g］における演算の集合と，それ以後の演算の集合は直接的な順序関係を失ってしまう。このため，点g以降の演算は［s, g］における演算の上界とは呼べないであろう。とはいえ，これは或る意味で定義の問題であるから，新たな演算の集合を上界として扱うように定義すればそのように言えるのかもしれない。しかし，少なくともこの問題に関して，この新たな定義は十分な説得力を持たないように思われる。

15）数学者の足立恒雄氏は，『無限のパラドクス』（講談社, 2000）においてこのパラドクスを取り上げ(pp.14-16, 47-48)，次のように論じている（p.48)。足立氏によれば，このパラドクスは，一定の時間内には「無数の点(瞬間)が含まれているという自明な事実を述べているにすぎ」ず，「それがパラドクスでありうるのはまったく心理的な理由による」。人が，無限の数を「『唱え終わった』というとき，そこに

も時間感覚を伴った錯覚があって，どの数にも共通な一定の時間（例えば1万分の1秒）をかけて，一つ一ずつ数を唱えたような気分を起こさせている」のだという。しかし，このパラドクスがこのような理由から生じているのでないことは，これまで述べてきたことから明らかであろう。

16）小論におけるこれまでの第二パラドクスの解釈について，次のように反論されるかもしれない。小論では，アキレウスおよび亀の速度がいずれも一定であることを前提とし，それぞれの回における両者の移動距離および両者間の距離が無限等比数列を形成すると解釈している。しかし，アリストテレスの報告では，両者の速度が一定であるとはどこにも述べられておらず，アキレウスと亀が共に不規則な速度で走る場合も排除されてはいない。そしてそのような場合でも，アキレウスは亀に追つけないという議論は成り立つから，小論の解釈は誤っており，少なくとも「アキレウス」に対する部分的な解決策しか示していない。このような反論は確かにもっともなものである。小論において，アキレウスと亀の速度を一定であると仮定したのは，議論が過度に複雑になることを避けるためであって，両者の速度が微妙に変化する場合をゼノンが認めていた可能性は十分にある。その場合は，アキレウスと亀の各回の移動距離は，無限数列にはなっても，無限等比数列にはならない。しかし，その場合でも，「アキレウスの方が亀より速い」という条件はすべての瞬間において満たされていなければならない。この条件の下では，両者間の距離は絶えず縮小して行く。したがって，任意の回におけるアキレウスの移動距離をa，亀の移動距離をb，両者間の距離をcとし，任意の自然数m, nが$L \leqq m$，$L \leqq n$，$m < n$（Lは或る自然数）を満たすとすると，これらと任意の正の値 ε との間に次の関係が成り立つ。

$$a_m - a_n \leqq \varepsilon, \quad b_m - b_n \leqq \varepsilon, \quad c_m - c_n \leqq \varepsilon$$

上の式はa, b, cがいずれも特殊なコーシー列を形成することを意味しており，それらは実数体において必ず或る値（0）に収束する。つまり，アキレウスと亀の速度が微妙に変化すると仮定しても，基本的にはこれまで論じてきたのと同様のことが言えるのである。（この場合の再帰的操作は，特定の数式で規定されるのではなく，むしろ「上の条件を満たすようにa_n, b_n, c_nを定める」という操作になる。）

17）例えば，J.O. Wisdom, 'Achilles on Physical Racecource', *Analysis* XII (1951-2), pp.67-72.（前掲W.C. Salmon［ed.］，*Zeno's Paradoxes* 所収）は次のように主張する。ゼノンのパラドクスは，無限分割は数学的には可能でも物理的には不可能だという差異に基づいている。彼によれば，M.Black の前掲論文は，無限の仕事を完了することの不可能性を指摘する点で正しいが，二つのパラドクスが数学的空間と物理的空間との本質的差異に由来するという点に関してはまだ認識が十分ではなく曖昧だった，というのである。

18）*cf.* 斎藤憲「ギリシアの幾何学」『現代思想』vol. 34-8, pp. 68-91 (2006年7月), p.70.

宇宙における無限大と無限小について述べたパスカルの非常に印象的な議論（『パンセ』Brunschvicg 版第72節）もまた，おそらく（α-2）のような操作規則を前提として論じられたのであり，その意味でそれは，物理学的発想というよりも，むしろ幾何学的発想に基づく議論なのである。

19）「稠密性（ちゅうみつせい）」とは，任意の二つの数の間に必ず他の数が存在すること，であり，また「完備性」とは，平たく言えば，任意の二つの数の間に他の数が隙間無く詰まっていること（連続体上のすべての点に何らかの数が対応していること）である。（正式には，［アルキメデス的順序体における］コーシー列の収束によって定義される。）

ところで，稠密性は有理数体でも成り立つため，もしも二つのパラドクスにおける無限分割がすべて有理点において為されると仮定すれば，必ずしも実数の概念を必要とするわけではない。しかし，第二パラドクスにおける亀とアキレウスとの速度比は（後者の方がより速いこと以外は）まったく任意であり，例えばそれが1：√2 となる場合（即ち，亀が或る距離を進む間に，アキレウスはその距離を一辺とする正方形の対角線に相当する距離を進む場合）もあり得るであろう。したがって，第二パラドクスにおいて可能なすべての場合を数によって記述するためには，完備性も備えた実数体が必要とされるわけである。実数体の定義にはいくつかの方式があるが，いずれも実質的には同じものである。それらの定義を，足立恒雄『数－体系と歴史－』（朝倉書店, 2002）pp. 156-159から引用しておく（証明は省略する）。

「【定理7.8】Kを順序体とする．このときKにおける次の諸命題はすべて同値である．

1．（上限の存在）Kにおける上に有界な空でない集合は，K内に上限をもつ．

2．（デデキントの公理）$(A|B)$ がKの切断であるとき, すなわちA, BはKの空でない部分集合であって,

$$A \sqcup B = K,\ A < B$$

を満たすとき，Aが最大値をもつか，Bが最小値をもつ.

3．（ワイアシュトラスの定理）単調増加，かつ上に有界なKの数列はKにおいて収束する.

4．（アルキメデスの公理＋区間縮小法）Kはアルキメデス的であって，しかも，$\{In\}n$ が単調に減少する閉区間の列で，幅 $|In|$ が0に収束するならば，すなわち

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty}|In| = 0$$

が満たされるならば， $\alpha \in In$ がすべてのnに対して成り立つような $\alpha \in K$がただ一つだけ存在する.

ここに，閉区間$I = [a, b]$の幅 $|I|$ とは$b - a$のことである.

5．（アルキメデスの公理＋完備性）Kはアルキメデス的であって, しかも, Kの基本列はK内に収束する.（pp.156-157)」

［なお，2.の $A \sqcup B$ はAとBの直和を表し，また$A < B$はAの数はどれもBの数より小さいことを表す。］

「**【定義7.6】** 定理7.8の同値な命題を満たす順序体は**実数体**と呼ばれる．たとえば，ワイアシュトラスの定理が成り立つ順序体は実数体である．(p.159)」

20）注19で引用した実数体の各種の定義のうち，３．４．５.はいずれも「収束」の概念を用いる。その場合，個々の実数は，或る無限数列の収束を通じて，その無限個の項が決して届かない或る一点（極限値）を間接的に指示することにより規定される。この意味において，第一・第二パラドクスにおける目標地点への到達不可能性の問題と，解析学的な実数の定義に備わる特質は，或る共通性を持つのである。

21）ここでの「抽象化された一般的操作規則」とは, 以前に述べた「(α-2) の (i)『再帰的操作によって生じる結果が任意の比率で限りなく縮小していくこと』を可能にするような数学的枠組」を意味するが，それを代数系的に表現すれば「実数が，四則の演算について閉じていること，特に除法と乗法について閉じていること」と言える。これに対応する操作法は，実数の定義が確立されるよりもはるか以前に，既に幾何学や解析学において実質的に認められていたものである。そのような操作法は，物理的連続体に対しては条件付きで認められるに過ぎないが，幾何学と解析学はこれを抽象し，無条件的に使用するのである。